

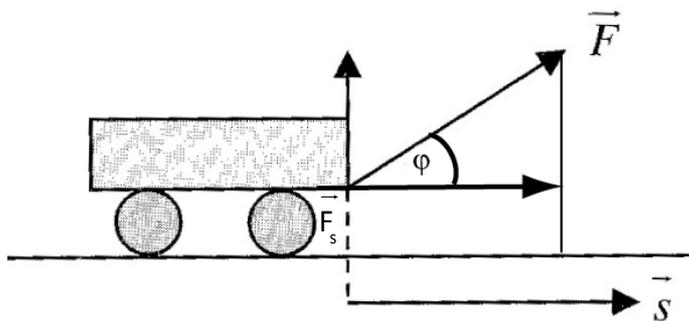
Das Skalarprodukt

In der Physik berechnet sich die Arbeit W nach der Formel $W = F \cdot s$, wenn eine konstante Kraft mit dem Betrag F in Richtung des Weges s wirkt.

Kraft und Weg sind im Allgemeinen vektorielle Größen. Schließen der Kraftvektor \vec{F} und der Wegvektor \vec{s} einen von 0° verschiedenen Winkel ein, so ist die obige Formel zur Berechnung der Arbeit nicht mehr anwendbar.

Beispiel:

An der Deichsel eines Wagens wird mit der Kraft \vec{F} unter einem Winkel φ schräg nach oben gezogen (siehe Skizze).



Es trägt nur die Komponente \vec{F}_s zur Arbeit bei $\vec{F}_s = F \cdot \cos\varphi$

Für die Arbeit W gilt dann: $W = \vec{F} \circ \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$

Definition des Skalarprodukts:

Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.

Dabei sind $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ die Längen oder Beträge der Vektoren \vec{a} und \vec{b} und α der kleinere der beiden Winkel, der von ihnen eingeschlossen wird.

Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

Für das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^2 bzw.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 gilt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Bemerkung:

Jedem Vektorpaar \vec{a}, \vec{b} ist als Produkt eindeutig eine reelle Zahl (Skalar) zugeordnet.

Rechenregeln für das Skalarprodukt:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
- (2) $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ (Distributivgesetz)
- (3) $(\lambda \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikation)

Anwendungen des Skalarprodukts:

1) Länge eines Vektors (Betrag eines Vektors):

Für den Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^2 bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

alternativ: $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ ($\sqrt{a^2}$ ist eine reelle Zahl, nicht der Vektor \vec{a} !!)

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

2) Einheitsvektor:

Für einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor \vec{a} des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3

ist $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der Einheitsvektor.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{pmatrix}$$

3) Entfernung zweier Punkte:

Für die Entfernung zweier Punkte $A(a_1 / a_2 / a_3)$ und $B(b_1 / b_2 / b_3)$ des Anschauungsraumes gilt:

$$|\overline{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel: $A(1/2/3)$ und $B(-1/0/1)$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

4) Winkel zwischen zwei Vektoren:

Für das Maß des Winkels φ zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren \vec{a} und \vec{b} des \mathbb{R}^2 oder des \mathbb{R}^3 gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{mit } 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 - 24 + 20 = -7$$

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{42} \quad |\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{61}$$

$$\cos\varphi = \frac{-7}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{61}} \approx -0,138 \quad \Rightarrow \varphi \approx 97,95^\circ$$

5) Orthogonale Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind genau dann orthogonal (senkrecht),

wenn ihr Skalarprodukt Null ist:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

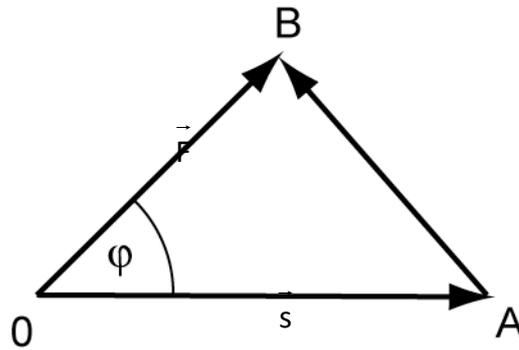
a) Zeigen Sie, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$ ist.

b) Bestimmen Sie c_1 so, dass $\vec{a} \perp \vec{c}$ gilt.

$$\text{a) } \vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 + 6 - 10 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{b) } \vec{a} \circ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 + 2 - 4 = c_1 - 2 \Rightarrow c_1 - 2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2$$

Herleitung der Formel für das Skalarprodukt mit Hilfe des Kosinussatzes:



$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos \varphi \quad (\text{Kosinussatz}) \\
 \Rightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot \left| \vec{s} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \cdot \cos \varphi \\
 \Rightarrow b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2b_3a_3 + a_3^2 &= \\
 a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2 \cdot \left| \vec{s} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \cdot \cos \varphi &= \\
 \Rightarrow -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) &= -2 \cdot \left| \vec{s} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \cdot \cos \varphi \\
 \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= \left| \vec{s} \right| \cdot \left| \vec{F} \right| \cdot \cos \varphi
 \end{aligned}$$